МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
КІРОВОГРАДСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

ФАКУЛЬТЕТ ПРОЕКТУВАННЯ І ЕКСПЛУАТАЦІЇ МАШИН
КАФЕДРА ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ

РЯДИ

Методичні вказівки
для студентів технічних спеціальностей

КІРОВОГРАД
2014

Вища математика. Методичні вказівки та індивідуальні завдання для студентів технічних спеціальностей / Укл.: Гуцул В.І., Якименко С.М. – Кіровоград: КНТУ, 2014. – 56 с.

Методичні вказівки та індивідуальні завдання до розділу “Теорія рядів” курсу вищої математики. По кожній темі коротко наведені основні теоретичні положення та розглянуті приклади на розв’язування типових завдань. Дані рекомендації по організації навчального процесу за кредитно-модульною системою.
Орієнтовано на студентів технічних спеціальностей денної та заочної форм навчання.

Затверджено на засіданні
кафедри вищої математики.
Протокол № від ..2014 р.

ЗМІСТ

Організація навчального процесу за кредитно-модульною системою

№ теми	Теми	Методичні вказівки	Індивідуальні завдання
1	2	3	4
Змістовий модуль 1. Числові ряди			
1	Основні поняття. Необхідна ознака збіжності.	§1.1	№
2	Достатні умови збіжності рядів з додатними членами.	§1.2	
3	Знакозмінні ряди.	§1.3	№
Змістовий модуль 2. Степеневі ряди			
4	Поняття функціонального ряду.	§2.1	№
5	Степеневі ряди. Інтервал збіжності. степеневого ряду.	§2.2	
6	Диференціювання та інтегрування степеневих рядів.	§2.3	№
7	Розклад функцій в степеневі ряди	§2.4	
Змістовий модуль 3. Застосування степеневих рядів			

1	2	3	4
8	Застосування степеневих рядів до наближених обчислень.	§3.1	№
9	Наближені обчислення визначених інтегралів.	§3.2	№
10	Застосування степеневих рядів до розв'язування диференціальних рівнянь.	§3.3	№
Змістовий модуль 4. Ряди Фур'є			
11	Ряди Фур'є. Розклад функції в ряд Фур'є.	§4.1	№
12	Ряди Фур'є для парних і непарних функцій.	§4.2	
13	Розвинення в ряд Фур'є неперіодичних функцій.	§4.3	

Розділ 1. Числові ряди

§ 1.1. Основні поняття. Необхідна ознака збіжності

Нехай дана нескінченна числова послідовність

$$u_1, u_2, u_3, \cdots, u_n, \cdots .$$

Вираз

$$u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \tag{1.1}$$

називається *числовим рядом*. Числа $u_1, u_2, u_3, \cdots, u_n, \cdots$ називаються членами числового ряду, а u_n – загальним (або n-м) членом ряду.

Якщо ряд (1.1) містить як додатні, так і від'ємні члени, то він називається *знакозмінним*. Якщо ж всі члени ряду невід'ємні, то він називається *знакододатним*.

Ряд заданий, якщо відомо його загальний член $u_n = f(n)$, тобто відоме правило, за яким для кожного номера $n\,(n=1,2,3,\cdots)$ визначається відповідний член ряду.

Приклад 1. Написати перші три члени ряду, загальний член якого заданий формулою $u_n = (-1)^{n+1}\dfrac{n}{2n+1}$.

Розв'язання. Вважаючи, що $n=1,2,3,$ одержуємо

$$u_1 = (-1)^{1+1}\frac{1}{2\cdot 1+1} = \frac{1}{3};\, u_2 = (-1)^{2+1}\frac{2}{2\cdot 2+1} = -\frac{2}{5};\, u_3 = (-1)^{3+1}\frac{3}{2\cdot 3+1} = \frac{3}{7}.$$

Даний ряд можна записати так:

$$\frac{1}{3}-\frac{2}{5}+\frac{3}{7}-\cdots+(-1)^{n+1}\frac{n}{2n+1}+\cdots \text{ або } \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n}{2n+1}.$$

Приклад 2. Знайти формулу для загального члена ряду

$$1+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 9}+\frac{1}{4\cdot 27}+\frac{1}{5\cdot 81}+\cdots.$$

Розв'язання. Можна замітити, що загальний член даного ряду визначається за формулою $u_n = \dfrac{1}{n\cdot 3^{n-1}}$.

Сума кінцевого числа перших n членів ряду називається n-ю *частинною сумою* цього ряду і позначається через s_n:

$$s_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n. \tag{1.2}$$

Розглянемо послідовність частинних сум

$$s_1 = u_1,\, s_2 = u_1 + u_2,\, \cdots, s_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n, \cdots.$$

Якщо існує границя

$$\lim_{n\to\infty} s_n = s, \qquad (1.3)$$

то її називають сумою ряду (1.1) і кажуть, що ряд *збігається*. Якщо ж вказана границя послідовності частинних сум дорівнює нескінченності або не існує, то ряд *розбігається*.

Приклад 3. Знайти суму ряду

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n\cdot(n+1)}+\cdots.$$

Розв'язання. Перетворюємо загальний член ряду (розкладаємо його на суму двох дробів):

$$u_n=\frac{1}{n\cdot(n+1)}=\frac{(1+n)-n}{n\cdot(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}.$$

Можемо записати

$$u_1=1-\frac{1}{2},\, u_2=\frac{1}{2}-\frac{1}{3},\, u_3=\frac{1}{3}-\frac{1}{4},\cdots,u_{n-1}=\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n},\, u_n=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1};$$

$$s_n=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=1-\frac{1}{n+1}.$$

Обчислюємо границю:

$$s=\lim_{n\to\infty} s_n=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n-1}\right)=1.$$

Оскільки існує скінченна границя, то ряд збігається і його сума дорівнює 1.

Наведемо *основні властивості* збіжних рядів.

1. Якщо збігається ряд

$$u_1+u_2+u_3+\cdots+u_n+\cdots,$$

то збігається і ряд

$$u_{m+1}+u_{m+2}+u_{m+3}+\cdots+u_{m+n}+\cdots,$$

отриманий з даного ряду відкиданням перших m членів; навпаки, якщо збігається останній ряд, то збігається і ряд, з якого він отримується.

2. Якщо ряд

$$u_1+u_2+u_3+\cdots+u_n+\cdots$$

збігається і його сума дорівнює s, то ряд

$$ku_1+ku_2+ku_3+\cdots+ku_n+\cdots$$

також збігається, причому сума останнього дорівнює ks.

3. Якщо ряди

$$u_1+u_2+u_3+\cdots+u_n+\cdots, \quad v_1+v_2+v_3+\cdots+v_n+\cdots$$

збігаються і їхні суми відповідно рівні s, σ, то ряд

$$(u_1+v_1)+(u_2+v_2)+(u_3+v_3)+\cdots+(u_n+v_n)\cdots$$

також збігається, причому його сума дорівнює $s+\sigma$.

Необхідна умова збіжності ряду: якщо ряд

$$u_1+u_2+u_3+\cdots+u_n+\cdots$$

збігається, то $\lim\limits_{n\to\infty} u_n=0$, тобто загальний член збіжного ряду прямує до нуля при $n\to\infty$.

Наслідок. Якщо загальний член ряду не прямує до нуля при $n\to\infty$, то ряд розбігається.

Приклад 4. З'ясувати, збігається чи розбігається ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+10}{10n+1}$.

Розв'язання. Перевіряємо виконання необхідної умови збіжності ряду:

$$\lim_{n\to\infty} u_n=\frac{n+10}{10n+1}=\frac{1}{10}\neq 0.$$

Отже, ряд розбігається.

Якщо необхідна умова збіжності для даного ряду виконується, то він не обов’язково збігається. Розглянемо ряд

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots. \tag{1.4}$$

Цей ряд називається *гармонійним*. Так як $\lim\limits_{n\to\infty} u_n=\frac{1}{n}=0$, то необхідна умова збіжності ряду виконується.

Покажемо тепер, що ряд (1.4) розбігається. Запишемо вказаний ряд наступним чином:

$$1+\frac{1}{2}+\overbrace{\frac{1}{3}+\frac{1}{4}}^{2\,чл.}+\overbrace{\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}}^{4\,чл.}+\overbrace{\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\frac{1}{11}+\frac{1}{12}+\frac{1}{13}+\frac{1}{14}+\frac{1}{15}+\frac{1}{16}}^{8\,чл.}\cdots.$$

Розглянемо також ряд виду

$$1+\frac{1}{2}+\overbrace{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}}^{2\,чл.}+\overbrace{\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}}^{4\,чл.}+\overbrace{\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}}^{8\,чл.}\cdots.$$

Позначимо через s_n і σ_n частинні суми 1-го та 2-го рядів відповідно. Легко бачити, що для $n>2$ виконується нерівність $s_n>\sigma_n$. Знайдемо частинні суми $\sigma_2,\sigma_4,\sigma_8,\cdots,\sigma_{2^k}$:

$$\sigma_2=1+\frac{1}{2}=1+1\cdot\frac{1}{2},\quad \sigma_4=\sigma_{2^2}=1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)=1+2\cdot\frac{1}{2},$$

$$\sigma_8=\sigma_{2^3}=1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\right)=1+3\cdot\frac{1}{2},\cdots,\sigma_{2^k}=1+k\cdot\frac{1}{2}.$$

Так як

$$\lim_{k\to\infty}\sigma_{2^k}=\lim_{k\to\infty}\left(1+k\cdot\frac{1}{2}\right)=\infty,$$

то

$$\lim_{k\to\infty}s_{2^k}>\lim_{k\to\infty}\sigma_{2^k}=\infty.$$

Очевидно, що умови $k\to\infty$ і $n\to\infty$ випливають одна з одної. Отже,

$\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \infty$, тобто гармонійний ряд розбігається.

Надалі часто будимо використовувати *узагальнено-гармонійний* ряд (ряд Діріхле)

$$1+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\cdots+\frac{1}{n^p}+\cdots. \qquad (1.5)$$

Можна показати, що при $p>1$ ряд збігається, а при $p\le 1$ ряд розбігається (при $p=1$ маємо гармонійний ряд).

Розглянемо ряд виду (сума членів *нескінченої геометричної прогресії*)

$$a+aq+aq^2+\cdots+aq^n+\cdots, \qquad (1.6)$$

де a – перший член геометричної прогресії; q – знаменник. Як відомо n-а *частинна сума* цього ряду обчислюється за формулою

$$s_n=\frac{a-aq^n}{1-q}. \qquad (1.7)$$

Знайдемо границю частинної суми:

$$\lim_{n\to\infty} s_n=\frac{a-aq^n}{1-q}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a}{1-q}-\frac{aq^n}{1-q}\right)=\frac{a}{1-q}-\lim_{n\to\infty}\frac{aq^n}{1-q}.$$

Якщо $|\mathrm{q}|<1$, то

$$\lim_{n\to\infty} s_n=\frac{a}{1-q}.$$

Якщо ж $|\mathrm{q}|\ge 1$, то вказана границя дорівнює нескінченності або не існує. Отже, при $|\mathrm{q}|<1$ ряд (1.6) збігається і його сума $s=\dfrac{a}{1-q}$; при $|\mathrm{q}|\ge 1$ ряд (1.6) розбігається.

§ 1.2. Достатні умови збіжності рядів з додатними членами

Теорія рядів застосовується для розв'язання багатьох практичних і теоретичних задач. Як правило, використовуються збіжні ряди, а тому питання збіжності ряду є одним з основних. Наведемо далі декілька достатніх умов збіжності для рядів з додатними (можливо невід'ємними) членами. Розглянемо спочатку *ознаки порівняння*.

Нехай задані числові ряди з додатними членами:

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots, \tag{2.1}$$

$$v_1 + v_2 + \cdots + v_n + \cdots. \tag{2.2}$$

Перша ознака порівняння. Якщо для всіх значень n виконується нерівність $u_n \le v_n$,то із збіжності ряду (2.2) випливає збіжність ряду (2.1), а із розбіжності ряду (2.1) випливає розбіжність ряду (2.2). Іншими словами, якщо збігається ряд з більшими членами, то збігається і ряд з меншими членами, а якщо розбігається ряд з меншими членами, то розбігається і ряд з більшими членами.

Доведемо, що якщо збігається ряд (2.2), то збігається і ряд (2.1). Нехай $s_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$, $\sigma_n = v_1 + v_2 + \cdots + v_n$. З умови (2.3) випливає, що $s_n \le \sigma_n$. Так як ряд (2.2) збігається, то існує границя $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n = \sigma$. Можемо записати $s_n \le \sigma_n < \sigma$, тобто послідовність частинних сум $\{s_n\}$ обмежена. Так як ряд (2.1) складається з додатних (можливо невід'ємних) членів, то для будь-якого n виконується нерівність $s_n \le s_{n+1}$.Це означає, що послідовність $\{s_n\}$ неспадна. Так як обмежена і неспадна послідовність є збіжною, то існує границя $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = s$. Отже, ряд (2.1) збігається.

Зауваження. Умова $u_n \le v_n$ може виконуватися не для всіх n, а починаючи з деякого номера $n = N$.

При застосуванні ознак порівняння досліджуваний ряд порівнюється з рядом, який вже досліджений. В якості останнього, як правило, будимо використовувати ряд Діріхле або ряд, члени якого утворюють нескінченну геометричну прогресію (див. попередній параграф).

Приклад 1. Дослідити збіжність числового ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\sin n|}{n^2}$.

Розв'язання. Маємо ряд з невід'ємними членами. Застосуємо першу ознаку порівняння. Для порівняння візьмемо ряд Діріхле $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, який збігається ($p = 2 > 1$). Так як $|\sin n| \le 1$, то для будь-якого n справедлива нерівність $\frac{|\sin n|}{n^2} \le \frac{1}{n^2}$.

Згідно з першою ознакою порівняння, із збіжності взятого для порівняння ряду Діріхле випливає збіжність заданого ряду.

Друга (гранична) ознака порівняння. Якщо для рядів (2.1) і (2.2) існує скінчена і відмінна від нуля границя $\lim_{n \to \infty} \frac{u_n}{v_n} = k$, то ці ряди одночасно збігаються або одночасно розбігаються.

Приклад 2. Дослідити збіжність числового ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^3 + 5}{n^4 + 1}$.

Розв'язання. Застосуємо другу ознаку порівняння. Для порівняння візьмемо гармонійний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, який розбігається. Обчислюємо границю:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n^3+5}{n^4+1}:\frac{1}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n^3+5}{n^4+1}\cdot\frac{n}{1}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n^4+5n}{n^4+1}\right)=2\,.$$

Згідно з другою ознакою порівняння, із розбіжності взятого для порівняння гармонійного ряду випливає розбіжність заданого ряду.

Нагадаємо правило, яке було застосовано при обчисленні останньої границі. Якщо $P_m(n)$ і $Q_r(n)$ многочлени m-го і r-го степеня відповідно, то границя $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{P_m(n)}{Q_r(n)}$ дорівнює: а) відношенню числових коефіцієнтів при старших степенях n многочленів $P_m(n)$ і $Q_r(n)$, якщо $m=r$; б) нулю, якщо $m<r$; в) нескінченності, якщо $m>r$.

Ознака Даламбера. Якщо для ряду з додатними членами $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ існує границя

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=l\,, \tag{2.3}$$

то ряд збігається за $l<1$ і розбігається за $l>1$. У випадку, коли $l=1$, питання про збіжність ряду цією ознакою не вирішується (ряд може як збігатися, так і розбігатися).

Приклад 3. Дослідити на збіжність ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^n}{(n+3)!}$.

Розв'язання. Застосовуємо ознаку Даламбера. Враховуючи, що $n!=1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot n$ і $(n+4)!=1\cdot2\cdot\ldots\cdot(n+3)\cdot(n+4)=(n+3)!\cdot(n+4)$, маємо:

$$u_n=\frac{2^n}{(n+3)!},\quad u_{n+1}=\frac{2^{n+1}}{((n+1)+3)!}=\frac{2^{n+1}}{(n+4)!}\,;$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2^{n+1}}{(n+4)!}\cdot\frac{(n+3)!}{2^n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{2^n\cdot 2(n+3)!}{(n+3)!\cdot(n+4)\cdot 2^n}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n+4}=0<1.$$

Ряд збігається.

Радикальна ознака Коші. Якщо для ряду з додатними членами $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ існує границя

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=h\,, \tag{2.4}$$

то ряд збігається за $h<1$ і розбігається за $h>1$. У випадку, коли $h=1$, ознака відповіді не дає.

Цю ознаку зручно застосовувати у тому випадку, коли загальний член u_n представляє собою деякий вираз в степені n, тобто $u_n=\left(f(n)\right)^n$.

Приклад 4. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n^3+1}{n^3+10}\right)^n$.

Розв'язання. Застосовуємо радикальну ознаку Коші:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{2n^3+1}{n^3+10}\right)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n^3+1}{n^3+10}=2>1.$$

Так як границя більше одиниці, то ряд розбігається.

Інтегральна ознака Коші. Нехай члени ряду $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ додатні і не зростають, тобто $u_1\ge u_2\ge\cdots\ge u_n\ge\cdots$, і нехай $f(x)$ – неперервна незростаюча функція, для якої виконуються рівності $f(1)=u_1$,

$f(2)=u_2,\cdots,f(n)=u_n,\cdots$. Тоді, якщо невласний інтеграл $\int\limits_1^{\infty} f(x)dx$ збігається, то збігається і ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$; якщо ж невласний інтеграл $\int\limits_1^{\infty} f(x)dx$ розбігається, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ також розбігається.

Відмітимо, що формула для обчислення n-го члена $u_n = f(n)$ визначає підінтегральну функцію $f(x)$. Функція цілочисельного аргументу $f(n)$ замінюється на функцію дійсного аргументу $f(x)$. Інтегральна ознака, як правило, використовується у тих випадках, коли інші ознаки не дають відповіді на питання про збіжність числового ряду.

Приклад 5. Дослідити збіжність ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}$.

Розв'язання. Застосуємо інтегральну ознаку Коші. Так як $u_n = \frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}$, то $f(x) = \frac{1}{(x+1)\ln(x+1)}$. Досліджуємо невласний інтеграл:

$$\int\limits_1^{\infty} \frac{1}{(x+1)\ln(x+1)}dx = \lim_{b\to\infty}\int\limits_1^{b} \frac{1}{(x+1)\ln(x+1)}dx = \lim_{b\to\infty}\int\limits_1^{b} \frac{d(\ln(x+1))}{\ln(x+1)} =$$

$$= \lim_{b\to\infty} \ln|\ln(x+1)|\Big|_1^b = \lim_{b\to\infty}(\ln|\ln(b+1)| - \ln|\ln 2|) = \infty .$$

Так як невласний інтеграл розбігається, то розбігається і даний ряд.

§ 1.3. Знакозмінні ряди

Знакопереміжним називається ряд виду

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \cdots + (-1)^{n+1}u_n + \cdots, \qquad (3.1)$$

де $u_i > 0\ (i = 1,2,3,\cdots)$.

Ознака Лейбніца збіжності знакопереміжного ряду. Якщо абсолютні величини членів знакопереміжного ряду (3.1) монотонно спадають, тобто

$$u_1 > u_2 > \cdots > u_n > \cdots \tag{3.2}$$

і загальний член прямує до нуля при нескінченному зростанні *n*, тобто

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 0\,, \tag{3.3}$$

то цей ряд збігається, його сума *S* додатна і не перевищує першого члена ряду.

Зауваження. Ознака Лейбніца залишається вірною і у тому випадку, коли умова (3.2) виконується не для всіх *n*, а починаючи з деякого номера *N*.

Приклад 1. Дослідити збіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n^2}$.

Розв'язання. Запишемо заданий ряд в розгорнутому вигляді

$$1-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}-\frac{1}{16}+\cdots+(-1)^{n+1}\frac{1}{n^2}+\cdots.$$

Маємо знакопереміжний ряд. Застосовуємо ознаку Лейбніца. Перевіряємо виконання умов (3.2) і (3.3):

$$1>\frac{1}{4}>\frac{1}{9}>\frac{1}{16}>\cdots;\quad \lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}=0\,.$$

Обидві умови виконуються. Ряд збігається.

Розглянемо *знакозмінні* ряд

$$u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n + \cdots, \tag{3.4}$$

тобто ряд, який містить як додатні, так і від'ємні члени, причому декілька послідовних членів ряду можуть мати один знак. Очевидно, що знакопереміжний ряд є частинним випадком знакозмінного.

Дамо поняття *умовної* та *абсолютної* збіжності для знакозмінного ряду. Разом з рядом (3.4) розглянемо ряд, який складений із абсолютних величин його членів, а саме

$$|u_1|+|u_2|+|u_3|+\cdots+|u_n|+\cdots. \tag{3.5}$$

Знакозмінний ряд (3.4) називається *абсолютно збіжним*, якщо збігається ряд (3.5), який складений із абсолютних величин його членів. Ряд (3.4) називається *умовно збіжним*, якщо він сам збігається, а ряд (3.4), складений із абсолютних величин його членів, розбігається.

Можна показати, що із збіжності ряду(3.5) випливає збіжність ряду (3.4), а із розбіжності ряду (3.4) випливає розбіжність ряду (3.5).

Приклад 2. Дослідити на абсолютну та умовну збіжність ряди

а) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n+1}{5^n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{3n+2}{n^2+4}$.

Розв'язання. а) Розглянемо спочатку ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{5^n}$, який складений із абсолютних величин членів заданого ряду. Застосуємо ознаку Даламбера:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+2}{5^{n+1}}:\frac{n+1}{5^n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+2)\cdot 5^n}{5^{n+1}\cdot(n+1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+2}{5(n+1)}=\frac{1}{5}<1.$$

Ряд збігається. Отже, заданий знакозмінний (точніше знакопереміжний) ряд збігається абсолютно.

б) Розглянемо спочатку ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n+2}{n^2+4}$, який складений із абсолютних величин членів заданого ряду. Застосуємо другу ознаку порівняння. Для порівняння візьмемо гармонійний ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, який розбігається. Маємо:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n+2}{n^2+4}:\frac{1}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2+2n}{n^2+4}=3\,.$$

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n+2}{n^2+4}$ розбігається. Отже, заданий знакозмінний ряд може збігатися тільки умовно. Застосуємо до нього ознаку Лейбніца (маємо знакопереміжний ряд):

$$\frac{5}{5}=\frac{8}{8}>\frac{11}{13}>\frac{14}{20}>\cdots;\quad \lim_{n\to\infty}\frac{3n+2}{n^2+4}=0\,.$$

Ряд збігається. Отже, заданий знакозмінний ряд збігається умовно.

Розділ 2. Степеневі ряди

§ 2.1. Поняття функціонального ряду

Ряд

$$u_1(x)+u_2(x)+\cdots+u_n(x)+\cdots, \tag{1.1}$$

членами якого є функції від x, називається *функціональним*.

При певному фіксованому значенні x функціональний ряд перетворюється в числовий, який може збігатися або розбігатися. Сукупність значень x, для яких функції $u_1(x),u_2(x),\cdots,u_n(x),\cdots$ визначені і ряд (1) збігається, називається *областю збіжності* функціонального ряду. Так як в області збіжності сума ряду є функцією від x, то будимо позначати її через $s(x)$.

Приклад 1. Знайти область збіжності та суму функціонального ряду

$$1+x+x^2+\cdots+x^{n-1}+\cdots.$$

Розв'язання. Даний ряд представляє собою суму нескінченої геометричної прогресії зі знаменником $q = x$ і першим членом $b_1 = 1$. Його членами є степеневі функції x^n. Як відомо, цей ряд збігається при $|x| < 1$, тобто областю його збіжності є проміжок $(-1;1)$. Сума ряду визначається як сума нескінченої геометричної прогресії, а саме $s(x) = 1/(1-x)$.

§ 2.2. Степеневі ряди. Інтервал збіжності степеневого ряду

Ряд виду

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \qquad (2.1)$$

називається *степеневим рядом*, а дійсні числа $a_0, a_1, \cdots, a_n, \cdots$ – коефіцієнтами степеневого ряду. Ряд більш загального виду

$$a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \cdots + a_n(x-a)^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n \quad (2.2)$$

також називається степеневим.

Теорема Абеля. Якщо степеневий ряд (2.1) збігається при $x = x_0$ $(x_0 \neq 0)$, то він збігається, причому абсолютно, для всіх x, що задовольняють умову $|x| < |x_0|$; якщо ряд (2.1) розбігається при $x = x_1$, то він розбігається для всіх x, що задовольняють умову $|x| > |x_1|$.

Теорема Абеля має важливе значення в теорії степеневих рядів. З цієї теореми випливає, що для будь-якого степеневого ряду (2.1) існує *інтервал збіжності*, тобто інтервал $(-R;R)$, усередині якого ряд абсолютно збігається і за межами якого ряд розбігається. Додатне число R називається *радіусом збіжності* степеневого ряду. На кінцях інтервалу, в точках $x = R$ і $x = -R$, питання про збіжність або розбіжність даного ряду вирішується окремо для кожного конкретного ряду. Якщо $R=+\infty$, то інтервалом збіжності є уся числова пряма. У випадку, коли $R=0$, степеневий ряд (2.1) збігається лише в точці $x=0$.

Для ряду (2.2) інтервалом збіжності є інтервал $(a-R;a+R)$.

З метою визначення радіуса збіжності R розглянемо ряд, складений із абсолютних величин членів ряду (2.1):

$$|a_0|+|a_1x|+|a_2x^2|+\cdots+|a_nx^n|+\cdots. \qquad (2.3)$$

Застосуємо до знакододатнього ряду (2.3) ознаку Даламбера:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}x^{n+1}|}{|a_nx^n|}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}|x|\right)=|x|\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|.$$

Ряд збігається, якщо

$$|x|\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|<1,\quad |x|<\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|.$$

Отже, радіус збіжності степеневого ряду (2.1) може бути знайдений за формулою

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|. \qquad (2.4)$$

Застосувавши до ряду (2.3) радикальну ознаку Коші, отримуємо:

$$R=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}. \qquad (2.5)$$

Приклад 1. Знайти область збіжності степеневих рядів а) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{5^n}{n+1}x^n$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{n^2+2}x\right)^n$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2^n}(x-3)^n$.

Розв'язання. а) Знайдемо радіус збіжності за формулою (2.4):

$$R=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{5^n}{n+1}:\frac{5^{n+1}}{n+2}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{5^n\cdot(n+2)}{(n+1)\cdot 5^{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+2}{5(n+1)}=\frac{1}{5}.$$

Отже, ряд абсолютно збігається на проміжку $(-1/5;1/5)$.

Досліджуємо збіжність ряду на кінцях інтервалу збіжності, тобто в точках $x=\pm 1/5$. При $x=-1/5$ отримуємо:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{5^n}{n+1}\left(-\frac{1}{5}\right)^n=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{2n+1}\frac{1}{n+1}=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}.$$

До ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}$ застосовуємо другу ознаку порівняння. Для порівняння візьмемо гармонійний ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, який розбігається. Так як $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}:\frac{1}{n}\right)=1$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}$ розбігається. Отже, заданий степеневий ряд в точці $x=-1/5$ розбігається.

При $x=1/5$ маємо:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{5^n}{n+1}\left(\frac{1}{5}\right)^n=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n+1}.$$

Застосовуємо до отриманого знакопереміжного ряду ознаку Лейбниця:

$$\frac{1}{2}>\frac{1}{3}>\frac{1}{4}>\cdots;\quad \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0.$$

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n+1}$ збігається (умовно). Заданий степеневий ряд в точці $x=1/5$ збігається і областю його збіжності є півінтервал $(-1/5;1/5]$.

б) Визначаємо радіус збіжності за формулою (2.5):

$$R=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{n^2+2}{n+1}\right)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+2}{n+1}=+\infty.$$

Отже, інтервалом збіжності заданого степеневого ряду є уся числова пряма.

в) Маємо степеневий ряд виду (2.2), у якому $a=3$. Інтервалом збіжності для такого ряду є проміжок $(a-R;a+R)$. Застосовуємо формулу (2.4):

$$R=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2}{2^n}:\frac{(n+1)^2}{2^{n+1}}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2\cdot 2^{n+1}}{2^n\cdot(n+1)^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2}{(n+1)^2}=2.$$

Заданий степеневий ряд абсолютно збігається на проміжку $(1;5)$. При $x=5$ одержуємо ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^2$, який розбігається (не виконується необхідна умова збіжності). Якщо $x=1$, то отримуємо ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n n^2$, для якого також не виконується необхідна умова збіжності, тобто він розбігається. Отже, областю збіжності заданого степеневого ряду є проміжок $(1;5)$.

Інтервал збіжності степеневого ряду можна визначати, застосувавши безпосередньо ознаку Даламбера або ознаку Коші до ряду, складеному із абсолютних величин членів вихідного ряду.

Приклад 2. Знайти область збіжності ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{x^{2n}}{n^2 3^n}$.

Розв'язання. Застосуємо ознаку Даламбера до ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^{2n}}{n^2 3^n}$, який складений із абсолютних величин членів заданого ряду (враховано, що $x^{2n}\geq 0$ при будь-якому x):

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x^{2(n+1)}}{(n+1)^2 3^{n+1}}:\frac{x^{2n}}{n^2 3^n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n+2}\cdot n^2 3^n}{(n+1)^2 3^{n+1}\cdot x^{2n}}=\frac{x^2}{3}\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{(n+1)^2}=\frac{x^2}{3}.$$

Ряд збігається, якщо $x^2/3<1$, звідки $|x|<\sqrt{3}$. Досліджуємо збіжність заданого ряду на кінцях інтервалу $(-\sqrt{3};\sqrt{3})$. В обох точках $x=\pm\sqrt{3}$ одержуємо ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n^2}$. Оскільки ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ збігається як ряд Діріхле за $p=2>1$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n^2}$ збігається абсолютно. Отже, областю збіжності заданого степеневого ряду є відрізок $[-\sqrt{3};\sqrt{3}]$.

§ 2.3. Диференціювання та інтегрування степеневих рядів

Нехай функція $f(x)$ є сумою степеневого ряду

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots, \tag{3.1}$$

інтервалом збіжності якого є проміжок $(-R;R)$. Можна показати, що функція $f(x)$ диференційована на $(-R;R)$ і її похідна $f'(x)$ може бути знайдена почленним диференціюванням ряду (3.1), тобто

$$f'(x)=a_1+2a_2x+\cdots+na_nx^{n-1}+\cdots. \tag{3.2}$$

Інтервалом збіжності ряду (3.2) також є проміжок $(-R;R)$. Сказане залишається справедливим і для похідних вищих порядків.

Можна також показати, що функція $f(x)$ інтегрована на $(-R;R)$ і інтеграл від неї може бути знайдений почленним інтегруванням ряду (3.1), тобто якщо $x_1,x_2\in(-R,R)$, то

$$\int\limits_{x_1}^{x_2}f(x)dx=\int\limits_{x_1}^{x_2}a_0dx+\int\limits_{x_1}^{x_2}a_1xdx+\int\limits_{x_1}^{x_2}a_2x^2dx+\cdots+\int\limits_{x_1}^{x_2}a_nx^ndx+\cdots. \tag{3.3}$$

У випадку, коли інтеграл береться по відрізку $[0,x],\ x\in(-R,R)$, маємо

$$\int_0^x f(x)dx = a_0 x + \frac{a_1 x^2}{2} + \frac{a_2 x^3}{3} + \cdots + \frac{a_n x^{n+1}}{n+1} + \cdots. \qquad (3.4)$$

Ряд (3.4) має той же інтервал збіжності, що і ряд (3.1).

Приклад 3. Знайти суму ряду

$$f(x) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + \frac{x^n}{n} + \cdots.$$

Розв'язання. Розглянемо спочатку ряд, який представляє собою суму членів нескінченної геометричної прогресії (див. § 2.1, прикл. 1):

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1} + \cdots.$$

Інтервалом збіжності цього ряду є проміжок $(-1;1)$. Зінтегруємо останній ряд по відрізку $[0, x]$, $x \in (-1, 1)$:

$$\int_0^x \frac{1}{1-x} dx = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + \frac{x^n}{n} + \cdots.$$

Враховуючи, що $\int_0^x \frac{dx}{1-x} = -\ln|1-x|\Big|_0^x = \ln\frac{1}{1-x}$, отримуємо

$$\ln\frac{1}{1-x} = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + \frac{x^n}{n} + \cdots.$$

Відмітимо, що проміжок $(-1;1)$ також є інтервалом збіжності цього ряду.

§ 2.4. Розклад функцій в степеневі ряди

Нагадаємо спочатку формулу Тейлора. Нехай функція $f(x)$ диференційована $n+1$ раз в інтервалі $|x-a|<R$. Тоді в цьому інтервалі функція $f(x)$ може бути представлена у вигляді

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\cdots+$$

$$+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+R_n(x)\,, \qquad (4.1)$$

де $R_n(x)=\dfrac{f^{(n+1)}[a+\theta(x-a)]}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}, 0<\theta<1$.

Формула (4.1) називається *формулою Тейлора*, а функція $R_n(x)$ – *залишковим членом* формули Тейлора.

При $a=0$ отримаємо формулу Маклорена:

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+R_n(x)\,, \qquad (4.2)$$

де $R_n(x)=\dfrac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}, 0<\theta<1$.

Припустимо тепер, що в інтервалі $|x-a|<R$ функція $f(x)$ нескінченно диференційована і виконується умова

$$\lim_{n\to\infty}R_n(x)=0\,. \qquad (4.3)$$

Перейшовши до границі в формулі (4.1) при $n\to\infty$, отримуємо розкладання функції $f(x)$ в ряд Тейлора:

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\cdots \qquad (4.4)$$

Можна показати, що при виконанні умови (4.3) ряд правої частини формули (4.4) збігається і його сумою є функція $f(x)$.

При $a=0$ отримаємо ряд Маклорена:

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\cdots. \qquad (4.5)$$

Приклад 1. Розкласти в степеневий ряд функцію $f(x)=\sin x$.

Розв'язання. Знайдемо похідні: $f'(x)=\cos x$, $f''(x)=-\sin x$, $f'''(x)=-\cos x$, $f^{(4)}(x)=\sin x$, $f^{(5)}(x)=\cos x,\cdots$. При $x=0$ отримуємо: $f(0)=0$, $f'(0)=1$, $f''(0)=0$, $f'''(0)=-1$, $f^{(4)}(0)=0$, $f^{(5)}(x)=1,\cdots$. Записуємо ряд Маклорена:

$$x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+\cdots.$$

З метою визначення інтервалу збіжності застосуємо ознаку Даламбера до ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|x|^{2n-1}}{(2n-1)!}$, який складений із абсолютних величин членів заданого ряду:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|x|^{2n+1}\cdot(2n-1)!}{(2n+1)!\cdot|x|^{2n-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{|x|^2}{2n(2n+1)}=0.$$

Так як остання границя рівна нулю при будь-якому x, то записаний степеневий ряд збігається абсолютно на всій числовій прямій.

Покажемо, що для залишкового члену $R_n(x)$ виконується умова (4.3). Враховуючи, що $|\sin\theta x|\le 1$ і $|\cos\theta x|\le 1$, отримуємо:

$$\lim_{n\to\infty}|R_n(x)|=\lim_{n\to\infty}\frac{|f^{(n+1)}(\theta x)|}{(n+1)!}|x|^{n+1}\le\lim_{n\to\infty}\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}=0.$$

Отже, $\lim_{n\to\infty}|R_n(x)|=0$ і $\lim_{n\to\infty}R_n(x)=0$ при будь-якому x. Так як умова (4.3) виконується, то функція $\sin x$ є сумою побудованого степеневого ряду, тобто можемо записати

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+\cdots,-\infty<x<+\infty. \quad (4.6)$$

Приклад 2. Розкласти в степеневий ряд функцію $f(x)=\cos x$.

Розв'язання. Здиференціювавши розкладання (4.6), одержуємо:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots, -\infty < x < +\infty . \qquad (4.7)$$

Аналогічно попередньому можна отримати розвинення в степеневі ряди деяких інших елементарних функцій:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots, -\infty < x < +\infty , \qquad (4.8)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \dots, -1 < x \le 1 , \qquad (4.9)$$

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)} + \dots, -1 \le x \le 1 , \qquad (4.10)$$

$$(1+x)^m = 1 + \frac{m}{1!} x + \frac{m(m-1)}{2!} x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!} x^3 + \dots +$$

$$+ \frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!} x^n + \dots, -1 < x < 1 . \qquad (4.11)$$

Наведені вище формули можуть використовуватися для розкладання в степеневі ряди інших функцій.

Приклад 3. Розкласти в степеневий ряд функції:

а) $f(x) = \ln\frac{1+x}{1-x}$, б) $f(x) = \cos^2 x$.

Розв'язання. а) Застосовуємо формулу (4.9). Замінивши x на $-x$, отримуємо

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \dots - \frac{x^n}{n} + \dots, -1 \le x < 1 .$$

Віднімаємо від (4.9) останню рівність і дістаємо

$$\ln\frac{1+x}{1-x} = 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots + \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \dots \right), -1 < x < 1 . \qquad (4.12)$$

б) Використовуючи формулу (4.7), а також відому тригонометричну формулу $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x)$, одержуємо

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}\left(1+1-\frac{(2x)^2}{2!}+\frac{(2x)^4}{4!}-\cdots+(-1)^n\frac{(2x)^{2n}}{(2n)!}+\cdots\right)=$$

$$=1-\frac{2}{2!}x^2+\frac{2^3}{4!}x^4-\cdots+(-1)^n\frac{2^{2n-1}}{(2n)!}x^{2n}+\cdots, -\infty<x<+\infty .$$

Розділ 3. Застосування степеневих рядів

§ 3.1. Застосування степеневих рядів до наближених обчислень

За допомогою розкладання функції в степеневий ряд можна наближено обчислити її значення із заданою точністю. Для цього будимо використовувати формули (4.6)-(4.12) попереднього параграфа. При застосуванні вказаних формул степеневий ряд замінюється n-ю частинною сумою. Число членів n цієї суми залежить від заданої похибки, яка, в свою чергу, визначається сумою відкинутого ряду. Найбільш зручною є ситуація, коли для даного значення x отримуємо знакопереміжний ряд, який задовольняє умовам теореми Лейбніца. У цьому випадку абсолютна величина суми відкинутого ряду не перебільшує абсолютної величини першого відкинутого члена.

Приклад 1. Обчислити з точністю до 0,001: а) $\sin 20^\circ$; б) $1/\sqrt{e}$, в) $\sqrt[3]{68}$.

Розв'язання. а) Застосовуємо формулу (4.6). Поклавши $x=\pi/9$ (переводимо градуси в радіани), отримуємо

$$\sin\frac{\pi}{9}=\frac{\pi}{9}-\frac{\pi^3}{9^3\cdot 3!}+\frac{\pi^5}{9^5\cdot 5!}-\cdots .$$

Маємо знакопереміжний ряд, для якого виконуються умови теореми Лейбніица. Так як $\dfrac{\pi^5}{9^5 \cdot 5!} \approx 0{,}000043 < 0{,}001$, то достатньо залишити два члена ряду, тобто $\sin\dfrac{\pi}{9} \approx \dfrac{\pi}{9} - \dfrac{\pi^3}{9^3 \cdot 3!} \approx 0{,}342$.

б) Використовуємо формулу (4.8). Оскільки $1/\sqrt{e} = e^{-0{,}5}$, то беремо $x = -0{,}5$. Маємо:

$$e^{-0{,}5} = 1 - 0{,}5 + \frac{0{,}5^2}{2!} - \frac{0{,}5^3}{3!} + \frac{0{,}5^4}{4!} - \cdots .$$

Для отриманого ряду умови теореми Лейбніца виконуються. Так як $0{,}5^4/4! > 0{,}001$, а $0{,}5^5/5! \approx 0{,}00026 < 0{,}001$, то

$$e^{-0{,}5} \approx 1 - 0{,}5 + \frac{0{,}5^2}{2!} - \frac{0{,}5^3}{3!} + \frac{0{,}5^4}{4!} \approx 0{,}607 .$$

в) Представимо шуканий корінь у вигляді:

$$\sqrt[3]{68} = \sqrt[3]{64+4} = \sqrt[3]{64(1+4/64)} = 4\sqrt[3]{(1+1/16)} = 4(1+1/16)^{1/3} .$$

Застосовуємо формулу (4.11) при $x = 1/16, m = 1/3$:

$$\sqrt[3]{68} = 4\left(1 + \frac{1/3}{1!\cdot 16} + \frac{(1/3)\cdot(-2/3)}{2!\cdot 16^2} + \frac{(1/3)\cdot(-2/3)\cdot(-5/3)}{3!\cdot 16^3} + \cdots\right) =$$

$$= 4\left(1 + \frac{1}{48} - \frac{1}{2304} + \frac{5}{331776} - \cdots\right).$$

Маємо знакопереміжний ряд, який задовольняє умовам теореми Лейбніца. Враховуючи, що $4 \cdot 5/331776 < 0{,}001$, залишаємо в дужках лише три доданки і одержуємо $\sqrt[3]{68} \approx 4{,}082$.

Формула (4.9) дозволяє обчислювати натуральні логарифми $\ln a$ за умови, що $0 < a \le 2$. Більш ефективною є формула (4.12). За її допомогою можна обчислювати логарифми будь-якого додатного числа a (якщо $-1<x<1$, то $0<a<\infty$). Визначимо x через a:

$$\frac{1+x}{1-x}=a,\quad x=\frac{a-1}{a+1}. \tag{1.1}$$

Очевидно, що для всіх можливих x ряд (4.12) є знакосталим. Оцінимо абсолютну величину похибки, яка виникає при відкиданні всіх членів ряду після n-го. Використовуючи формулу для суми членів нескінченної геометричної прогресії, маємо:

$$\rho_n \le 2\left(\frac{|x|^{2n+1}}{2n+1}+\frac{|x|^{2n+3}}{2n+3}+\frac{|x|^{2n+5}}{2n+5}+\cdots\right)<2\left(\frac{|x|^{2n+1}}{2n+1}+\frac{|x|^{2n+3}}{2n+1}+\right.$$

$$\left.+\frac{|x|^{2n+5}}{2n+1}+\cdots\right)=2\frac{|x|^{2n+1}}{2n+1}(1+x^2+x^4+\cdots)=\frac{2|x|^{2n+1}}{2n+1}\cdot\frac{1}{1-x^2}.$$

Таким чином отримали наступну оцінку

$$\rho_n<\frac{2|x|^{2n+1}}{(2n+1)(1-x^2)},\quad -1<x<1. \tag{1.2}$$

Відмітимо, що підхід, за допомогою якого була отримана оцінка (1.2), застосовується і для інших рядів.

Приклад 2. Обчислити $\ln 3$ з точністю до 0,001.

Розв'язання. Використовуючи (1.1) і (1.2), отримуємо:

$$x=\frac{3-1}{3+1}=\frac{1}{2},\ \rho_4<\frac{2\cdot(1/2)^9}{9\cdot(1-1/4)}=\frac{1}{1728}<0{,}001.$$

Застосовуючи формулу (4.12), залишаємо чотири доданка:

$$\ln 3\approx 2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3\cdot 2^3}+\frac{1}{5\cdot 2^5}+\frac{1}{7\cdot 2^7}\right)\approx 1{,}098.$$

§ 3.2. Наближені обчислення визначених інтегралів

Як відомо, первісні для деяких функцій не виражаються через елементарні функції. Обчислення відповідних визначених інтегралів за допомогою формули Ньютона-Лейбніця неможливе. Вказані інтеграли іноді зручно обчислювати за допомогою рядів. Розглянемо даний підхід на конкретних прикладах.

Приклад 1. Обчислити визначені інтеграли з точністю до 0,001:

а) $\int\limits_0^1 \frac{\sin x}{x}dx$; б) $\int\limits_0^{0,5} e^{-x^2}\,dx$.

Розв'язання. а) Відмітимо, що невизначені інтеграли $\int \frac{\sin x}{x}dx$ і $\int e^{-x^2}\,dx$ не виражаються через елементарні функції. Розклавши функцію $\sin x$ в степеневий ряд, можемо записати:

$$\frac{\sin x}{x} = \frac{1}{x}\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!}\cdots \right) = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!}\cdots .$$

Інтегруючи останній ряд почленно, одержимо

$$\int\limits_0^1 \frac{\sin x}{x}dx = \int\limits_0^1 \left(1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \cdots \right)dx = \left(x - \frac{x^3}{3\cdot 3!} + \frac{x^5}{5\cdot 5!} - \frac{x^7}{7\cdot 7!} + \cdots \right)\Bigg|_0^1 =$$

$$= 1 - \frac{1}{18} + \frac{1}{600} - \frac{1}{35280} + \cdots .$$

За теоремою Лейбніца для забезпечення потрібної точності достатньо залишити три доданки. Отже, $\int\limits_0^1 \frac{\sin x}{x}dx \approx 1 - \frac{1}{18} + \frac{1}{600} \approx 0{,}946$.

б) Враховуючи, що

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots ,$$

можемо записати

$$e^{-x^2} = 1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^8}{4!} + \cdots .$$

Зінтегрувавши почленно і застосувавши теорему Лейбніца, отримуємо:

$$\int_0^{0,5} e^{-x^2}dx = \int_0^{0,5}\left(1-x^2+\frac{x^4}{2!}-\frac{x^6}{3!}+\cdots\right)dx = \left(x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5\cdot 2!}-\frac{x^7}{7\cdot 3!}+\cdots\right)\Bigg|_0^{0,5} =$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{24}+\frac{1}{320}-\frac{1}{5376}+\cdots\approx\frac{1}{2}-\frac{1}{24}+\frac{1}{320}\approx 0,461\,.$$

§ 3.3. Застосування степеневих рядів до розв’язування диференціальних рівнянь

Один з наближених методів розв’язування диференціальних рівнянь базується на теорії степеневих рядів. Його суть полягає у тому, що частинний розв’язок диференціального рівняння представляється у вигляді ряду Тейлора. Сума кінцевого числа членів цього ряду буде наближено рівнятися шуканому частинному розв’язку.

Розглянемо, наприклад, диференціальне рівняння другого порядку

$$y'' = F(x, y, y')\,, \tag{3.1}$$

яке задовольняє початковим умовам

$$y(x_0) = y_0,\; y'(x_0) = y_0'\,. \tag{3.2}$$

Припустимо, що розв’язок $y = y(x)$ існує і представляється у вигляді ряду Тейлора:

$$y = y(x_0) + \frac{y'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{y''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots\,. \tag{3.3}$$

Коефіцієнти останнього степеневого ряду послідовно визначаються за допомогою рівняння (3.1) і умов (3.2). Дійсно, зразу же можемо записати

$$y(x_0) = y_0,\; y'(x_0) = y_0',\; y''(x_0) = y_0'' = F(x_0, y_0, y_0')\,.$$

Здиференціювавши рівняння (3.1), отримуємо

$$y''' = F'_x(x,y,y') + F'_y(x,y,y')y' + F'_{y'}(x,y,y')y''.$$

Підставивши відповідні значення, дістаємо

$$y'''(x_0) = F'_x(x_0,y_0,y'_0) + F'_y(x_0,y_0,y'_0)y'_0 + F'_{y'}(x_0,y_0,y'_0)y''_0.$$

Продовжуючи вказану процедуру, визначаємо інші коефіцієнти.

Для значень x, при яких отриманий ряд (3.3) збігається, він є розв'язком рівняння (3.1).

Приклад 1. Знайти три перших відмінних від нуля члена розвинення в степеневий ряд розв'язку диференціального рівняння $y'' = xy' + y$, якщо $y(0) = 0,\ y'(0) = 1$.

Розв'язання. Нехай шукану функцію $y = y(x)$ розкладено в ряд Маклорена:

$$y = y(0) + \frac{y'(0)}{1!}x + \frac{y''(0)}{2!}x^2 + \frac{y'''(0)}{3!}x^3 + \cdots.$$

У відповідності з умовою $y(0) = 0,\ y'(0) = 1;\ y''(0) = 0\cdot 1 + 0 = 0$. Диференціюючи задане рівняння, отримуємо:

$$y''' = y' + xy'' + y' = 2y' + xy'',\quad y'''(0) = 2\cdot 1 + 0\cdot 0 = 2;$$

$$y^{(4)} = 2y'' + y'' + xy''' = 3y'' + xy''',\quad y^{(4)}(0) = 3\cdot 0 + 0\cdot 2 = 0;$$

$$y^{(5)} = 3y''' + y''' + xy^{(4)} = 4y''' + xy^{(4)},\quad y^{(5)}(0) = 4\cdot 2 + 0\cdot 0 = 8.$$

Шуканий розв'язок має вигляд

$$y = x + \frac{2}{3!}x^3 + \frac{8}{5!}x^5 + \cdots = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{15} + \cdots.$$

Розділ 4. Ряди Фур'є

§ 4.1. Ряди Фур'є. Розклад функції в ряд Фур'є

Нехай $f(x)$ – періодична функція з періодом $T = 2l$. Якщо на відрізку $[-l,l]$ функція $f(x)$ інтегрована, то *Рядом Фур'є* цієї функції називається тригонометричний ряд

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right), \qquad (1.1)$$

коефіцієнти якого визначаються за формулами

$$a_0=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)dx\,, \qquad (1.2)$$

$$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx \quad (n=1,2,3,\cdots)\,, \qquad (1.3)$$

$$b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx \quad (n=1,2,3,\cdots)\,. \qquad (1.4)$$

Коефіцієнти $a_0, a_n, b_n\ (n=1,2,3,\cdots)$ називаються *коефіцієнтами Фур'є.*

Теорема про збіжність ряду Фур'є. Якщо періодична функція $f(x)$ з періодом $2l$ і її похідна $f'(x)$ неперервні на відрізку $[-l,l]$ або ж мають на ньому кінцеве число точок розриву 1-го роду, то ряд Фур'є, побудований для цієї функції, збігається в усіх точках. Сума одержаного ряду дорівнює значенню функції $f(x)$ у точках неперервності функції. Якщо ж x_0 – точка розриву, то у цій точці сума ряду дорівнює середньому арифметичному границь функції праворуч і ліворуч, тобто

$$f(x_0)=\frac{f(x_0-0)+f(x_0+0)}{2}\,, \qquad (1.5)$$

де $f(x_0-0)=\lim\limits_{x\to x_0-0}f(x),\ f(x_0+0)=\lim\limits_{x\to x_0+0}f(x)$.

При виконанні умов наведеної теореми можемо записати

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right). \qquad (1.6)$$

У частинному випадку, коли функція $f(x)$ має період $T=2\pi$, ряд Фур'є та його коефіцієнти визначаються наступним чином:

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos nx+b_n\sin nx\right), \qquad (1.7)$$

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx\,, \qquad (1.8)$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nxdx \quad (n=1,2,3,\cdots), \qquad (1.9)$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nxdx \quad (n=1,2,3,\cdots). \qquad (1.10)$$

Приклад 1. Розкласти в ряд Фур'є періодичну функцію $f(x)$, яка задана на одному періоді:

$$f(x)=\begin{cases}1{,}5 \text{ при } -2\le x\le 0,\\ -x \text{ при } 0<x\le 2.\end{cases}$$

Розв'язання. Можемо побудувати графік заданої функції (рис.1).

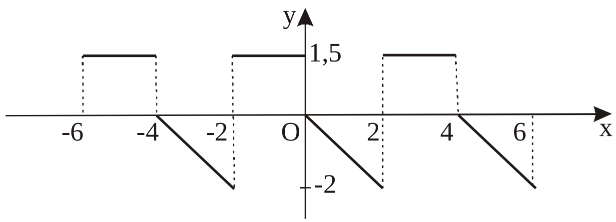

Рис.1

Відмітимо, що функція $f(x)$ задовольняє умовам теореми про збіжність, тому її можна розкласти в ряд Фур'є.

У нашому випадку $2l=4, l=2$. Визначаємо коефіцієнти Фур'є за допомогою формул (1.2)-(1.4):

$$a_0 = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} f(x)dx = \frac{1}{2}\int_{-2}^{0} 1{,}5dx + \frac{1}{2}\int_{0}^{2}(-x)dx = 0{,}5;$$

$$a_n = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} f(x)\cos\frac{n\pi x}{2}dx = \frac{1}{2}\int_{-2}^{0} 1{,}5\cos\frac{n\pi x}{2}dx - \frac{1}{2}\int_{0}^{2} x\cos\frac{n\pi x}{2}dx;$$

$$\int_{-2}^{0} 1{,}5\cos\frac{n\pi x}{2}dx = 1{,}5\frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{2}\Big|_{-2}^{0} = 0;$$

$$\int_{0}^{2} x\cos\frac{n\pi x}{2}dx = \left|\begin{matrix} u = x,\, dv = \cos\frac{n\pi x}{2}dx \\ du = dx,\, v = \frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{2}\end{matrix}\right| = \frac{2x}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{2}\Big|_{0}^{2} - \frac{2}{n\pi}\int_{0}^{2}\sin\frac{n\pi x}{2}dx =$$

$$= \frac{4}{n^2\pi^2}\cos\frac{n\pi x}{2}\Big|_{0}^{2} = \frac{4}{n^2\pi^2}((-1)^n - 1), \quad a_n = -\frac{2}{n^2\pi^2}((-1)^n - 1);$$

$$b_n = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} f(x)\sin\frac{n\pi x}{2}dx = \frac{1}{2}\int_{-2}^{0} 1{,}5\sin\frac{n\pi x}{2}dx - \frac{1}{2}\int_{0}^{2} x\sin\frac{n\pi x}{2}dx;$$

$$\int_{-2}^{0} 1{,}5\sin\frac{n\pi x}{2}dx = -\frac{3}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{2}\Big|_{-2}^{0} = -\frac{3}{n\pi}(1 - (-1)^n);$$

$$\int_{0}^{2} x\sin\frac{n\pi x}{2}dx = \left|\begin{matrix} u = x,\, dv = \sin\frac{n\pi x}{2}dx \\ du = dx,\, v = -\frac{2}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{2}\end{matrix}\right| = -\frac{2x}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{2}\Big|_{0}^{2} +$$

$$+\frac{2}{n\pi}\int_{0}^{2}\cos\frac{n\pi x}{2}dx = -\frac{4}{n\pi}\cos n\pi + \frac{4}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi x}{2}\Big|_{0}^{2} = -\frac{4}{n\pi}(-1)^n;$$

$$b_n = -\frac{3}{2n\pi}(1 - (-1)^n) + \frac{2}{n\pi}(-1)^n = \frac{(-1)^n \cdot 7 - 3}{2n\pi}.$$

При обчисленні інтегралів були використані очевидні співвідношення:

$$\sin n\pi = 0,\ \cos n\pi = (-1)^n \quad (n = 1,2,3,\cdots)\ .$$

Записуємо ряд Фур'є:

$$f(x) = \frac{1}{4} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{n^2\pi^2}(1-(-1)^n)\cos\frac{n\pi x}{2} + \frac{(-1)^n\cdot 7 - 3}{2n\pi}\sin\frac{n\pi x}{2}\right).$$

На рис.2 зображені графіки заданої функції $f(x)$ (пунктирна лінія) і частинної суми знайденого ряду Фур'є, останні члени якої відповідають $n = 10$.

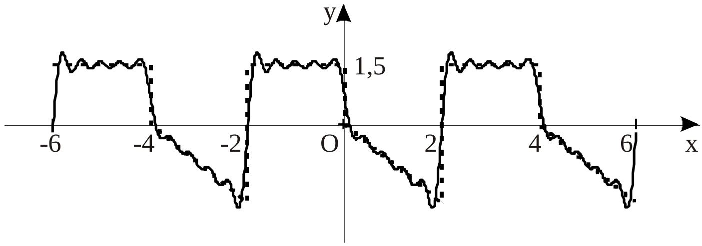

Рис.2

§ 4.2. Ряди Фур'є для парних і непарних функцій

Нехай функція $f(x)$ інтегрована на відрізку $[-l, l]$. Можемо записати

$$\int_{-l}^{l} f(x)dx = \int_{-l}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{l} f(x)dx\ .$$

Перетворюємо перший інтеграл правої частини і отримуємо:

$$\int_{-l}^{0} f(x)dx = \left|\begin{matrix} x=-t,\ dx=-dt \\ x=-l,\ t=l;\ x=0,\ l=0\end{matrix}\right| = -\int_{l}^{0} f(-t)dt = \int_{0}^{l} f(-t)dt = \int_{0}^{l} f(-x)dx$$

$$\int_{-l}^{l} f(x)dx = \int_{0}^{l} f(-x)dx + \int_{0}^{l} f(x)dx\ . \qquad (2.1)$$

Якщо $f(x)$ парна, тобто $f(-x) = f(x)$, то на основі (2.1) маємо

$$\int_{-l}^{l} f(x)dx = \int_{0}^{l} f(-x)dx + \int_{0}^{l} f(x)dx = \int_{0}^{l} f(x)dx + \int_{0}^{l} f(x)dx = 2\int_{0}^{l} f(x)dx \,. \quad (2.2)$$

У випадку, коли $f(x)$ непарна, тобто $f(-x) = -f(x)$, отримуємо

$$\int_{-l}^{l} f(x)dx = \int_{0}^{l} f(-x)dx + \int_{0}^{l} f(x)dx = -\int_{0}^{l} f(x)dx + \int_{0}^{l} f(x)dx = 0 \,. \quad (2.3)$$

Розглянемо тепер періодичну функцію $f(x)$ з періодом $T = 2l$, яка інтегрована на відрізку $[-l, l]$. Нехай функція $f(x)$ парна. Тоді функція $f(x)\cos\dfrac{n\pi x}{l}$ є парною (добуток двох парних), а функція $f(x)\sin\dfrac{n\pi x}{l}$ є непарною (добуток парної на непарну). Використовуючи формули (1.2)-(1.4) попереднього параграфа і враховуючи (2.2), (2.3), дістаємо наступні значення для коефіцієнтів Фур'є:

$$a_0 = \frac{2}{l}\int_{0}^{l} f(x)dx, \;\; a_n = \frac{2}{l}\int_{0}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx, \;\; b_n = 0 \quad (n = 1,2,3,\cdots) \,, \quad (2.4)$$

Отже, ряд Фур'є для парних функцій має вигляд

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{l} \,. \quad (2.5)$$

Іншими словами, парна функція розкладається по косинусам.

Аналогічно попередньому, якщо $f(x)$ непарна, то отримуємо:

$$a_0 = 0, \;\; a_n = 0, \;\; b_n = \frac{2}{l}\int_{0}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx \quad (n = 1,2,3,\cdots) \,; \quad (2.6)$$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{l} \,. \quad (2.7)$$

Як бачимо, непарна функція розкладається по синусам.

Приклад 1. Розкласти в ряд Фур'є періодичну функцію $f(x)$, яка має період $T = 2\pi$ і $f(x) = x$ на відрізку $[-\pi, \pi]$.

Розв'язання. Побудуємо графік заданої функції (рис.3).

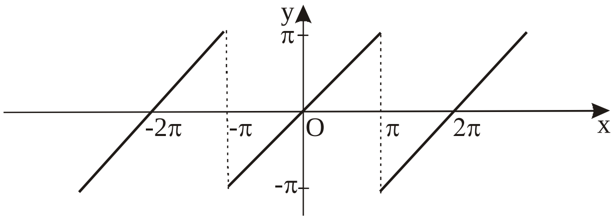

Рис.3

Функція непарна відрізку $[-\pi, \pi]$. Застосовуємо формули (2.6), (2.7):

$$a_0 = 0;\ a_n = 0;\ b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x \sin nx dx = -\frac{2}{n}\cos n\pi = (-1)^{n+1}\frac{2}{n};$$

$$f(x) = 2\left(\sin x - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \cdots + (-1)^{n+1}\frac{\sin nx}{n} + \cdots\right).$$

§ 4.3. Розвинення в ряд Фур'є неперіодичних функцій

Якщо неперіодична функція визначена на інтервалі $(-\infty, +\infty)$, то її неможливо розкласти в ряд Фур'є на всій числовій прямі. Якщо ж неперіодична функція $f(x)$ задана на кінцевому відрізку $[0, l]$, то вона може бути розвинена в ряд Фур'є. Для цього достатньо довільно довизначити її на півінтервалі $[-l, 0)$, а потім розкласти в ряд Фур'є, вважаючи її періодичною функцією з періодом $T = 2l$. Найкраще функцію $f(x)$ довизначати так, щоб вона була парною або непарною на відрізку $[-l, l]$. У першому випадку функція розкладається по косинусам, а у другому – по синусам. Очевидно, що побудований таким чином ряд Фур'є буде відображати задану функцію тільки на відрізку

$[0, l]$.

Приклад 1. Розкласти в ряд Фур'є функцію $f(x)$, яка задана на відрізку $[0;\pi]$, причому на вказаному відрізку $f(x) = x$.

Розв'язання. Довизначимо $f(x)$ так, щоб вона була парною на відрізку $[-\pi, \pi]$ і періодичною з періодом $T = 2\pi$ (рис.4).

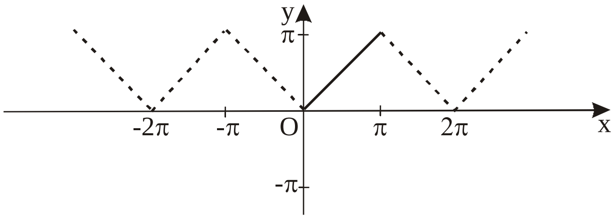

Рис.4

Застосовуємо формули (2.4), (2.5) попереднього параграфу:

$$b_n = 0;\ a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x dx = \frac{2}{\pi}\frac{x^2}{2}\bigg|_0^{\pi} = \pi;$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos nx dx = \frac{2}{\pi n} x \sin nx\bigg|_0^{\pi} + \frac{2}{\pi n^2}\cos nx\bigg|_0^{\pi} = \frac{2}{\pi n^2}((-1)^n - 1);$$

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left(\frac{\cos x}{1} + \frac{\cos 3x}{9} + \frac{\cos 5x}{25} + \cdots + \frac{\cos nx}{n^2} + \cdots\right).$$

ВАРІАНТИ ІНДИВІДУАЛЬНИХ ЗАВДАНЬ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

1. Дослідити на збіжність числові ряди:

1. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$; б) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ln n}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+4n+3}$.

2. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^5}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{4n^2+n+3}$.

3. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+5}{2^n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg}\frac{\pi}{n^2}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+3}{4n^3+5n}$.

4. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n!}{n^n}$; б) $\sum_{n=`}^{\infty} \arcsin^n \frac{1}{n}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{1+n^2}}$.

5. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!}$; б) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2+1}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+5}{3n^2+2n}$.

6. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{5^n}$; б) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ln^3 \mathrm{n}}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\sqrt{n}}$.

7. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)4^{n+1}}$; б) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln^{\mathrm{n}}(\mathrm{n}+1)}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2}{n^4+n^2+1}$.

8. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^4}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{\pi}{5^{\mathrm{n}}}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$.

9. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n(n+1)}{5^n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{e^{n^2}}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)^2}$.

10. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\cdot 10^n}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$.

11. а) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{5^{n-1}}{(n-1)!}$; б) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n^3}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(5n-4)(6n-5)}$.

12. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{2^n\cdot n!}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{\pi}{3^n}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+1)^3}$.

13. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+1)!}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}n\cdot\operatorname{tg}\frac{\pi}{2^{n+1}}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+3}{n^3+2}$.

14. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^n n}{n!}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{tg}\frac{\pi}{4n}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2n^2+1}$.

15. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{10^n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot 3^{n-1}}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n^2+3)^{\frac{5}{3}}}$.

16. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{(n+1)!}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{tg}\frac{\pi}{2^{n+1}}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{\sqrt{n^3}}$.

17. а) $\sum_{n=1}^{\infty}n^{\frac{n}{2}}\left(\arcsin\frac{1}{n}\right)^n$; б) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2\ln^2 n}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+1}{\sqrt[4]{n^9+1}}$.

18. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n n!}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\sin n\cdot\alpha|}{n^2}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{\sqrt{n^3}}$.

19. а) $\sum_{n=1}^{\infty}2^{-\sqrt{n}}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln(n+1)}{(n+1)^3}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n^2+n+1}}$.

20. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n^5}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\cos\frac{3}{n}\right)$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{\frac{n}{n^4+1}}$.

21. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{3^n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n\sqrt{n}}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+3}{n^3+2}$.

22. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{n-2}}{e^n n!}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln(n+1)}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2+1}$.

23. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{(n+1)(n+2)}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{\ln n}}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{n^3+n}$.

24. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n(n!)^2}{(2n)!}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln^n n}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{n+100}$.

25 а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n(n+1)}{5^n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{\frac{n}{n^4+1}}$.

26. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n+1)!}{\sqrt{(n+3)3^n}}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n^2+1}{3n^2-1}\right)^{n^2}$; в) $\sum_{n=1}^{m}\frac{n}{\sqrt[3]{n^4+n+3}}$.

27. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{(n+1)!}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\ln^3(n+1)}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2(n+4)}$.

28. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n n!}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n^2+2n)}$.

29. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^{\frac{n}{2}}}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}3^n\sin\frac{\pi}{2^n}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+4}{1+n^2}$.

30. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n+1}}{3^{n+1}\cdot n!}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{\sqrt{n^3+n}}$.

II. Дослідити на абсолютну та умовну збіжність ряди:

1. а) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{(n+1)}\frac{1}{\ln(n+1)}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n\sqrt[4]{2n+3}}$;

2. а) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\operatorname{tg}\frac{1}{n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2n-1}{3n}$;

3. а) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sqrt{n}}{n+100}$; б) $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n\ln(2n)}$;

4. а) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(n+1)^2}{2^n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n+1}{\sqrt{n^3}}$;

5. а) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{3^n n^2}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n(n+5)}$;

6. а) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(2n+1)2^{2n+1}}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sqrt[3]{n}+\sqrt{n}}{\sqrt[6]{n}+2\sqrt{n^3}}$;

7. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}}$;   б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n \left(\frac{2n+1}{3n-2}\right)^{n^2}$;

8. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1+n}{3+n^2}$;   б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n \ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$;

9. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{2^n}{5^n n^2}$;   б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{2n}{n^3+2n+8}$;

10. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{n}{2^{\frac{n}{2}}}$;   б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$

11. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{2n(n+1)}$;   б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n \left(\frac{4n-3}{5n+1}\right)^{n^3}$;

12. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{3n-1}$;   б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n \left(\frac{n+1}{n}\right)\frac{n}{5^n}$;

13. а) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}(-1)^n \frac{\ln n}{n}$;   б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{\sqrt{n^3+3}}{\sqrt[4]{n^4+n^2+1}}$;

14. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n \sqrt{\frac{n}{100n^2+1}}$;   б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{10}{(n+1)!}$;

15. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{(3n+1)^2}$;   б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n \left(\frac{n}{3n+1}\right)^{2n+1}$;

16. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{n\sqrt[3]{n}}$;   б) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}(-1)^n \frac{n^3}{(\ln n)^n}$;

17. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{n^3}{e^n}$;   б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{\sqrt[3]{n^2}}{\sqrt[6]{n}+\sqrt{n^3}}$;

18. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{n\sqrt{n}}$;   б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n n^3 \operatorname{arctg}^n \frac{\pi}{3n}$;

19. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n \left(\frac{2n-1}{3n+2}\right)^n$;   б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{5n+3}{n(n+1)(n+3)}$;

20. а) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{2n+1}{2^n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n 2^{n-1} e^{-n}$;

21. а) $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{\ln n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{3n+5}{n(n^2+1)}$;

22. а) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{2n+1}{n(n+1)}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{n\cdot 3^{n+2}}{5^n}$;

23. а) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{2n^2}{n^4-n^2+1}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{n\cdot 2^n}{3^n}$;

24. а) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{n\ln(n+1)}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{n}{\sqrt[3]{n^4+2n}}$;

25. а) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \operatorname{tg}\frac{1}{n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{2n+3}{3n^3+n+3}$;

26. а) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} \frac{1}{(n+1)2^{2n}}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{(n+3)(n+2)}$;

27. а) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{n+3}{\ln(n+1)}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{\sqrt{n}}{n^2+3n+2}$;

28. а) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \sin\frac{\pi}{n^n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{(2n+1)(2n+3)}$;

29. а) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{\sqrt[4]{n^5}+1}$;

30. а) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{(n+1)\ln n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n^3}+3n}$.

III. Знайти область збіжності степеневого ряду:

1. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}x^n$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-4)^n}{2n-1}$;

2. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} x^n$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n \cdot (x-2)^n}{n!}$;

3. а) $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{3^{n-1} n} x^n$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{2^n}$;

4. а) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^2} x^n$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n^2}$;

5. а) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n)!} x^n$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+8)^n}{n^2}$;

6. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} x^n$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2+x)^n}{5^n}$;

7. а) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!}{2n} x^n$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{2^n (n+3)}$;

8. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{3^n \sqrt{n}} x^n$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+5)^n}{\sqrt[3]{n+1}\sqrt{n^2+1}}$;

9. а) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n-1)!(2n-1)} x^n$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n (2+x)^n}{n!}$;

10. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{n!} x^n$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{2^n \ln(1+n)}$;

11. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(2n)!} x^n$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!(x+10)^n}{n^n}$;

12. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n (n+1)} x^n$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+5)^{n^2}}{(1+n)^n}$;

13. а) $\sum_{n=1}^{\infty} (1+\frac{1}{n})^n x^n$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{\ln^3(n+1)}(x+1)^n}{(1+n)}$;

14. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n(n+1)}x^n$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}(x-2)^n\sin\frac{\pi}{2^n}$;

15. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^4}{(n+1)^n}x^n$; б) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{n\cdot\ln n}$;

16. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n^3+n+1}x^n$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(3n-2)(x-3)^n}{2^{n+1}(n+1)^2}$;

17. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{3^n(n+2)}x^n$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^n}{n^2}$;

18. а) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{5^n\sqrt{n-1}}x^n$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^n}{1+2n}$;

19. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n4^{n-1}}x^n$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(x-2)^n\cdot\sqrt[3]{n+2}}{n+1}$;

20. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{n^2+1}}x^n$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+5)^n}{2n\cdot 4^n}$;

21. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{\sqrt{(1-4n)5^n}}x^n$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n+1)(x+1)^n}{2^n}$;

22. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n n\sqrt{n}}x^n$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+3)^n}{n^2}$;

23. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{10^n}{\sqrt{n}}x^n$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+2)^n}{n+7}$;

24. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)2^n}x^n$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(x-2)^n}{3n}$;

25. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n+1}{2^n}x^n$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{n\cdot 9^n}$;

26 а) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{3^n\sqrt{n}}x^n$; б) $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{(x-3)^n}{n\cdot\ln n}$;

27. а) $\sum_{n=1}^{\infty}2^n(1-\frac{1}{n})^{2n}x^n$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^n}{n\cdot 5^n}$;

28. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{(2n+1)^2\sqrt{3^n}}x^n$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(x-1)^n(2n+1)^n}{(3n-2)^n}$;

29. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{2^{n^2}}x^n$; б) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(x+2)^n}{n\cdot\ln n}$;

30. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n(n+1)}x^n$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n(x-5)^n}{n!}$.

IУ. Виконати розклад даної функції в ряд:

1. $f(x)=2^x\sin x$ за степенями x.
2. $f(x)=x\ln(1+x^2)$ за степенями x.
3. $f(x)=\sin\frac{x}{2}$ за степенями x.
4. $f(x)=\frac{1-e^{-x^2}}{x^2}$ за степенями x.
5. $f(x)=\ln(1-2x)$ за степенями x.
6. $f(x)=\cos^2 x$ за степенями x.
7. $f(x)=\ln(1-\frac{x}{3})$ за степенями x.
8. $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x}}$ за степенями x.
9. $f(x)=\sin^2 x$ за степенями x.
10. $f(x)=e^{\frac{x}{2}}$ за степенями x.

11. $f(x)=\dfrac{1}{1-x}$ за степенями x.

12. $f(x)=\dfrac{1}{e^{x}+1}$ за степенями x.

13. $f(x)=x^{3}\ln x$ за степенями x.

14. $f(x)=e^{\sin x}$ за степенями x.

15. $f(x)=\ln\dfrac{1+x}{1-x}$ за степенями x.

16. $f(x)=\dfrac{1}{(1-x)^{3}}$ за степенями x.

17. $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{9+x^{3}}}$ за степенями x.

18. $f(x)=\ln(x+2)$ за степенями $x-1$.

19. $f(x)=\ln x$ за степенями $x-1$.

20. $f(x)=\sqrt{x}$ за степенями $x-4$.

21. $f(x)=\dfrac{1}{x+2}$ за степенями $x-1$.

22. $f(x)=e^{3x}$ за степенями $x-1$.

23. $f(x)=\dfrac{1}{x+4}$ за степенями $x+2$.

24. $f(x)=\dfrac{1}{x}$ за степенями $x-3$.

25. $f(x)=x^{3}-2x+1$ за степенями $x-1$.

26. $f(x)=\sqrt{x}$ за степенями $x-1$.

27. $f(x)=x^{6}$ за степенями $x+2$.

28. $f(x)=x^{4}+2x^{3}-8x^{2}+4x+4$ за степенями $x+1$.

29. $f(x)=e^{x^{2}-4x+1}$ за степенями $x-2$.

30. $f(x)=x^{3}-2x^{2}-5x-2$ за степенями $x+4$.

V. Використовуючи відповідне розвинення функції в ряд, обчислити з точністю до 0,001.

1. $\sqrt{1,004}$; 2. $\sqrt{0,992}$; 3. $\sqrt{90}$;
4. $\sqrt[3]{1,006}$; 5. $\sqrt[3]{0,991}$; 6. $\sqrt[3]{130}$;
7. $\sin 12°$; 8. $\ln 2$; 9. $\ln 3$;
10. $\ln 4$; 11. $\sqrt{1,005}$; 12. $\sqrt{110}$;
13. $\sqrt[3]{70}$; 14. $\cos 12°$; 15. $\sqrt[4]{0.98}$;
16. $\cos 18°$; 17. $\ln 1,2$; 18. $\sin 10°$;
19. $\sqrt{e}$; 20. $\frac{1}{e}$; 21. $\sqrt[3]{250}$;
22. e^2; 23. $\sin 1°$; 24. $\cos 1°$;
25. $\cos 10°$; 26. $\sqrt[5]{30}$; 27. $\sqrt[3]{500}$;
28. $\sqrt[3]{1.015}$; 29. $\sqrt[3]{129}$; 30. $\frac{1}{e^2}$.

УІ. Обчислити визначений інтеграл з точністю до 0,001, розкладаючи в ряд підінтегральну функцію:

1. $\int_0^1 e^{-x^2} dx$; 2. $\int_0^1 \frac{\sin^2 \frac{x}{2}}{x} dx$;

3. $\int_0^{0,5} \frac{\sin x}{x} dx$; 4. $\int_2^4 e^{\frac{1}{x}} dx$;

5. $\int_0^{0,5} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} dx$; 6. $\int_{0,5}^1 \frac{e^{-x}}{x} dx$;

7. $\int_0^{0,5} \frac{x}{\sqrt{1+x^3}} dx$; 8. $\int_0^1 x e^{-\sqrt{x}} dx$;

9. $\int\limits_0^{0,5} \operatorname{arctg} x^2 dx$;　　10. $\int\limits_0^1 \cos\sqrt{x} dx$;

11. $\int\limits_0^{0,5} \frac{\ln(1+x^2)}{x} dx$;　　12. $\int\limits_0^{0,5} xe^{-x} dx$;

13. $\int\limits_0^1 \sin x^2 dx$;　　14. $\int\limits_0^{0,5} \frac{\sin x^2}{x^2} dx$;

15. $\int\limits_0^{0,5} \sqrt{1+x^2} dx$;　　16. $\int\limits_0^{0,5} \frac{e^x - 1}{x} dx$;

17. $\int\limits_0^{0,25} \frac{\sin 4x}{x} dx$;　　18. $\int\limits_0^1 x\cos\sqrt{x} dx$;

19. $\int\limits_0^{0,5} \frac{x}{\sqrt[4]{1+x^4}} dx$;　　20. $\int\limits_0^1 \sqrt{x} e^{-x^2} dx$;

21. $\int\limits_0^{0,5} \frac{dx}{\sqrt[3]{\left(1+x^3\right)^2}}$;　　22. $\int\limits_0^{0,5} x\cos\sqrt{2x} dx$;

23. $\int\limits_0^1 e^{-\frac{x^2}{2}} dx$;　　24. $\int\limits_0^{0,5} x \cdot \operatorname{arctg} x dx$;

25. $\int\limits_0^{0,25} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{1+x^2}} dx$;　　26. $\int\limits_0^1 x\sqrt{x} \sin\sqrt{x} dx$;

27. $\int\limits_0^1 x^2 \cos\sqrt{x} dx$;　　28. $\int\limits_0^1 e^{-0,1\cdot x^3} dx$;

29. $\int\limits_0^{0,5} \frac{\operatorname{arctg} x^2}{x} dx$;　　30. $\int\limits_0^1 \cos x^2 dx$.

VII. Знайти три перших відмінних від нуля члена розвинення в степеневий ряд розв'язку диференціального рівняння:

1. $y' = \frac{xy}{2};\ \ y(0) = 1;$

2. $y' = x^2 y^2 - 1;\ y(0) = 1;$

3. $y' = y^2 + x^3;\ y(0) = \frac{1}{2};$

4. $y' = y^2 - x;\ y(0) = 1;$

5. $y' = y + xe^y;\ y(0) = 0;$

6. $y' = x + \frac{1}{y};\ y(0) = 1;$

7. $y' = x^2 + y^3;\ \ y(1) = 1;$

8. $y' = e^x + xy;\ y(0) = 0;$

9. $y' = x^2 + y^2;\ y(0) = 1;$

10. $y' = x^2 y + e^y + x;\ y(0) = 0;$

11. $y' = e^{-2x} + y^2;\ y(0) = 0;$

12. $y' = \cos x + e^y + x;\ y(0) = 0;$

13. $y' = 2x^3 - y^2 - 2x;\ y(0) = 1;$

14. $y' = x^2 + \sin y + 1;\ y(0) = 0;$

15. $y' = xe^{-x} + \ln y;\ y(0) = 1;$

16. $y' = e^{xy} + y;\ y(0) = 1;$

17. $y' = \cos x + y^2;\ y(0) = 1;$

18. $y' = y + y^2;\ y(0) = 3;$

19. $y' = 2e^y - xy;\ y(0) = 0;$

20. $y' = \sin x + y^2;\ y(0) = 1;$

21. $y' = e^x + y;\ y(0) = 4;$

22. $y' = x + x^2 + y^2;\ y(0) = 3;$

23. $y'' = x^2 y;\ y(0) = 1; y'(0) = 1;$

24. $xy'' + xy = -y';\ y(0) = 1; y'(0) = 0;$

25. $y'' + xy = 0; \quad y(0) = 1; y'(0) = 0;$

26. $(1 + x^2)y'' + 2xy' = 0; \quad y(0) = 0; y'(0) = 1;$

27. $y'' - xy' - y = 0; \quad y(0) = 1; y'(0) = 0;$

28. $y'' = yy' - x^2; \quad y(0) = 1; y'(0) = 1;$

29. $y'' = x \sin y'; \quad y(1) = 0; y'(1) = \frac{\pi}{2};$

30. $y'' = xy' - y + 1; \quad y(0) = 0; y'(0) = 0.$

VIII. Виконати розклад функції в ряд Фур`є з періодом $2l$:

1. $f(x) = x$ при $-2 \le x \le 2; \quad l = 2;$

2. $f(x) = \begin{cases} -1 & \text{при} \quad -2 \le x < 0; \\ x & \text{при} \quad 0 \le x \le 2; \end{cases} \quad l = 2;$

3. $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad -3 \le x \le 0; \\ -2 & \text{при} \quad 0 < x \le 3; \end{cases} \quad l = 3;$

4. $f(x) = x - 1$ при $0 \le x \le 2; \quad l = 2;$

5. $f(x) = 4 - 2x$ при $0 \le x \le 2; \quad l = 2;$

6. $f(x) = 2 - x$ при $0 \le x \le 2; \quad l = 2;$

7. $f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{при} \quad -1 \le x < 0; \\ 1 & \text{при} \quad 0 \le x \le 1; \end{cases} \quad l = 1;$

8. $f(x) = 1 - x$ при $0 \le x \le 2; \quad l = 2;$

9. $f(x) = \begin{cases} -3 & \text{при} \quad -2 \le x \le 0; \\ -1 & \text{при} \quad 0 < x \le 2; \end{cases} \quad l = 2;$

10. $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} -2 \le x < 0; \\ x & \text{при} \, 0 \le x \le 2; \end{cases} \quad l = 2.$

Виконати розклад в ряд Фур'є періодичної функції $f(x)$, заданої на інтервалі.

11. $f(x)=\begin{cases} x & \text{при} \quad -1<x<0; \\ -1 & \text{при} \quad 0\le x\le 1; \end{cases}$

12. $f(x)=\begin{cases} 2x & \text{при} \quad -1<x<0; \\ 0 & \text{при} \quad 0\le x<\pi; \end{cases}$

13. $f(x)=\begin{cases} -x & \text{при} \quad -\pi<x\le 0; \\ \pi & \text{при} \quad 0<x\le \pi; \end{cases}$

14. $f(x)=4-|x| \quad \text{при} \quad -2<x\le \pi;$

15. $f(x)=x^2 \quad \text{при} \quad -1\le x<1;$

16. $f(x)=\begin{cases} -(x+2) & \text{при} \quad -\pi<x\le 0; \\ -(x-2) & \text{при} \quad 0<x\le \pi; \end{cases}$

17. $f(x)=\begin{cases} -2x & \text{при} \quad -\pi\le x\le 0; \\ 2x & \text{при} \quad 0<x\le \pi; \end{cases}$

18. $f(x)=|x| \quad \text{при} \quad -2\le x<2;$

19. $f(x)=2-x \quad \text{при} \quad -2\le x<2;$

20. $f(x)=\begin{cases} -1 & \text{при} \quad -3<x\le 0; \\ 5 & \text{при} \quad 0<x\le 3; \end{cases}$

21. $f(x)=\begin{cases} 0 & \text{при} \quad -1<x\le 0; \\ \dfrac{\pi}{2}x & \text{при} \quad 0<x\le 1; \end{cases}$

22. $f(x)=\begin{cases} x+1 & \text{при} \quad -1<x\le 0; \\ 0 & \text{при} \quad 0<x\le 1. \end{cases}$

Функцію $f(x)$ розкласти в ряд косинусів в заданому інтервалі.

23. $f(x)=x^2; \quad (0,\pi);$

24. $f(x)=2-x; \quad (0,2);$

25. $f(x)=2x-1; \quad (0,1);$

26. $f(x)=\pi-x; \quad (0,\pi).$

Функцію $f(x)$ розвкласти в ряд синусів в заданому інтервалі

27. $f(x)=x-1; \quad (0,1);$

28. $f(x)=\pi-x; \quad (0,\pi);$

29. $f(x)=2-x; \quad (0,1);$

30. $f(x)=x+1; \quad (0,1).$

Література:

1. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление для втузов. – М.: Наука, 1978.
2. Берман А.Ф., Араманович И.Г. Краткий курс математического анализа.– М.: Наука, 1971.
3. Каплан И.А. Практические занятия по высшей математике.– Харьков, 1966.
4. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. – М.: Высш. шк., 1986.
5. Бугров Я.С., Никольский С.М. Дифференциальное и интегральное исчисление. – М.: Наука, 1988.
6. Бугров Я.С., Никольский С.М. дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функция комплексного переменного. – М.: Наука, 1989.
7. Долгов Н.М. Высшая математика. – Киев: Вища шк., 1988.
8. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Основы математического анализа. – М.: Наука, 1971.
9. Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа. – М.: Высш. шк., 1988.
10. Курант Р. Курс дифференциального и интегрального исчисления. – М.: Наука, 1967.
11. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа – М.: Наука, 1985.
12. Кузнецов Л.А. Сборник заданий по высшей математике: Типовые расчеты. – М.: Высш. шк., 1983.
13. Рябушко А.П., Бархатов В.В., Державец В.В., Юруть И.Е. Сборник индивидуальных заданий по высшей математике: Учеб. пособие. – Мн.: Выш. шк., 1991.